

Section 1.1 연습문제

1.

 $\text{dom}(f) = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$, $\text{ran}(f) = \{y \mid -\infty < y \leq -1\}$

2.

 $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$, $\text{ran}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$

3.

 $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 - 2x \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{2}\right\}$, $\text{ran}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

4.

 $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$,
 $\text{ran}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

5.

 $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$, $\text{ran}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{1}{2}\right\}$

6.

 $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - \sqrt{x} \geq 0, x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 16\}$,
 $\text{ran}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

7.

 $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$,
 $\text{ran}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

8.

 $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \geq 0, x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1, x \neq 0\}$,
 $\text{ran}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$

9.

 $(f+g)(x) = 2x - 3 + \sqrt{x+1}$, $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
 $(f-g)(x) = 2x - 3 - \sqrt{x+1}$, $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
 $(2f-g)(x) = 4x - 6 - \sqrt{x+1}$, $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
 $(f \cdot g)(x) = (2x-3)\sqrt{x+1}$, $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x+1}}, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2x-3}, \text{ dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1, x \neq \frac{3}{2}\right\}$$

10.

$$\left(\frac{f+g}{f}\right)(x) = |x| + \sqrt{x^2-1}, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1, x \geq 1\}$$

$$(f-g)(x) = |x| - \sqrt{x^2-1}, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1, x \geq 1\}$$

$$(2f-g)(x) = 2|x| - \sqrt{x^2-1}, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1, x \geq 1\}$$

$$(f \cdot g)(x) = |x| \sqrt{x^2-1}, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1, x \geq 1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1, x > 1\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1, x \geq 1\}$$

11.

$$\left(\frac{f+g}{f}\right)(x) = \frac{1}{x-3} + x^2 - 1, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$$

$$(f-g)(x) = \frac{1}{x-3} - x^2 + 1, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$$

$$(2f-g)(x) = \frac{2}{x-3} - x^2 + 1, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$$

$$(f \cdot g)(x) = \frac{x^2-1}{x-3}, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{(x-3)(x^2-1)}, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, 1, 3\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = (x-3)(x^2-1), \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty\}$$

12.

$$\left(\frac{f+g}{f}\right)(x) = x^2 + 1 + \sqrt{|x|}, \text{ dom}(f) = \text{모든 실수}$$

$$(f-g)(x) = x^2 + 1 - \sqrt{|x|}, \text{ dom}(f) = \text{모든 실수}$$

$$(2f-g)(x) = 2x^2 + 2 - \sqrt{|x|}, \text{ dom}(f) = \text{모든 실수}$$

$$(f \cdot g)(x) = (x^2 + 1) \sqrt{|x|}, \text{ dom}(f) = \text{모든 실수}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{|x|}}, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x^2+1}, \text{ dom}(f) = \text{모든 실수}$$

13.

$\frac{f}{g}(x) = (f \circ g)(x) = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{\frac{1}{|x|}-1} = \frac{|x|}{1-|x|}, \text{ dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, 1\}$

$(g \circ f)(x) = \frac{1}{|f(x)|} = |x-1|, \text{ dom}(f) = \text{모든 실수}$

14.

$\frac{f}{g}$ 이 함수이다.

15.

$\frac{f}{g}$ 이 함수이다.

16.

$\frac{f}{g}$ 이 함수가 아니다.

17.

$\frac{f}{g}$ 이 함수이다.

18.

$\frac{f}{g}$ 이 함수가 아니다.

19.

$\frac{f}{g}$ 이 함수이다.

20.

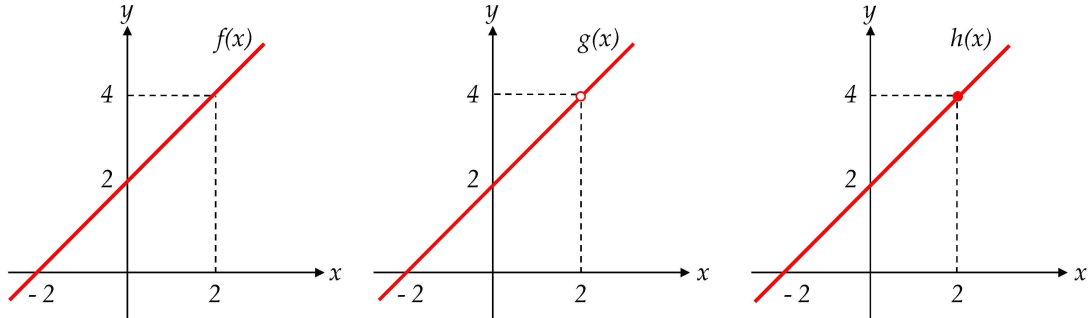
$\frac{f}{g}$ 이 함수가 아니다.

21.

$\frac{f}{g}$ 이 함수가 아니다.

22.

풀이 $f = h$ 이지만 $f \neq g$ 이다. 그리고 각각의 그래프를 그리면 다음과 같다.



23.

풀이 함수가 아니다.

24.

풀이 함수가 아니다.

25.

풀이 함수가 아니다.

26.

풀이 함수가 아니다.

27.

풀이 $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x < -1, x \geq 1 \end{cases}$

28.

풀이 $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < -1, x > 1 \end{cases}$

29.

풀이 $\text{dom}(f) = \{x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

30.

풀이 $\text{dom}(g) = \{x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

31.

$\frac{f}{g}$ 이 $\text{dom}(h) = \{x : x \geq 0\}$

32.

$\frac{f}{g}$ 이 $\text{dom}(k) = \{x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

서로 같은 함수는 정의역과 함수값이 같은 $f(x) = k(x)$ 뿐이다.

33.

$\frac{f}{g}$ 이 $(g \circ h)(x) = |-1 + \sqrt{x^2 - 1}|$; $(f \circ (g \circ h))(x) = \frac{1}{|-1 + \sqrt{x^2 - 1}|}$

34.

$\frac{f}{g}$ 이 $(h \circ g)(x) = \sqrt{(x-1)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 2x}$; $(f \circ (h \circ g))(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

35.

$\frac{f}{g}$ 이 $(f \circ h)(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $(g \circ (f \circ h))(x) = \left| \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} - 1 \right|$

36.

$\frac{f}{g}$ 이 $(h \circ f)(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}$; $(g \circ (h \circ f))(x) = \left| \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - 1 \right|$

37.

$\frac{f}{g}$ 이 $(f \circ g)(x) = \frac{1}{|x-1|}$; $(h \circ (f \circ g))(x) = \sqrt{\frac{1}{(x-1)^2} - 1} = \frac{2x-x^2}{|x-1|}$

38.

$\frac{f}{g}$ 이 $(g \circ f)(x) = \frac{|x-1|}{|x|}$; $(h \circ (g \circ f))(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2} - 1} = \frac{-2x+1}{|x|}$

39.

$\frac{f}{g}$ 이

	$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(g \circ f)(x)$
(a)	$\sqrt{x}$	$ x-1 $	$\sqrt{ x-1 }$	$ -1 + \sqrt{x} $
(b)	$\frac{x}{x+1}$	$x-1$	$\frac{x-1}{x}$	$-\frac{1}{x+1}$
(c)	$x^2 - 2$	$\sqrt{x}$	$(\sqrt{x})^2 - 2$	$\sqrt{x^2 - 2}$

Section 1.2 연습문제

1.

 전사이다.

2.

 전단사이다.

3.

 전단사이다.

4.

 전단사이다.

5.

 역함수와 정의역은 $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$, $x \geq 0$ 이다.

6.

 역함수와 정의역은 $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{x+2} - 1$, $x \neq -2$ 이다.

7.

 역함수와 정의역은 $y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$, $x \geq 0$ 이다.

8.

 역함수와 정의역은 $y = f^{-1}(x) = x^3 - 2$, $-\infty < x < \infty$ 이다.

9.

 $f^{-1}(1) = \sqrt[3]{3}$

10.

 $f^{-1}(-2) = -1$

11.

 $f^{-1}(6) = 2$

12.

 $f^{-1}(2) = 8$

13.

 $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 3)$

14.

 $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 4$

15.

 $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 4$

16.

 $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 3)$

17.

 증가함수

18.

 감소함수

19.

 $y = \sqrt{4-x^2}$

20.

 $y = -\sqrt{x^2-4}$

21.

 $y = \frac{1-x}{x+1}, x > -1$

22.

 $y = x - \frac{2}{x}, x > 0$

23.

풀이 $y = f(x)$ 가 정의역 안의 모든 x 에 대하여 증가한다고 하자. 정의역 안의 임의의 서로 다른 두 수를 x_1, x_2 라 하면 $x_1 < x_2$ 이거나 $x_1 > x_2$ 이다. 그러면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이거나 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다. 그러므로 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이므로 증가함수는 단사함수이다. 또한 함수 f 의 공역과 치역이 동일하므로 함수 f 는 전사함수이다. 그러므로 증가함수 f 는 전단사함수이다. 감소함수의 경우도 동일하게 증명된다.

24.

풀이

(a) $F = -40$

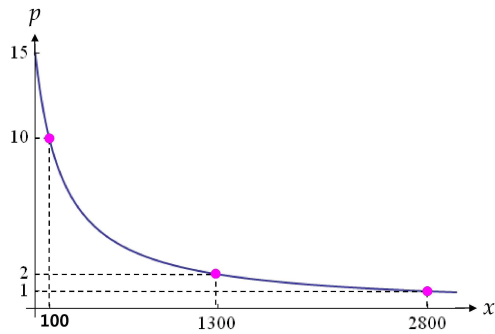
(b) $F(0) = \frac{160}{5} = 32$

25

풀이

(a) $p(100) = 10, p(1300) = 2, p(2800) = 1$

(b)



(c) $x(p) = \frac{200(15-p)}{p}$

(d) 300,000개 이상 팔리면 가격이 6만원 이하로 떨어진다.

Section 1.3 연습문제

1.

거짓, $f(x) = x^2$

2.

거짓, $f(x) = x^2$

3.

참

4.

거짓, $f(x) = (x-2)^2$

5.

$f(x)$ 는 기함수이다.

6.

$f(x)$ 는 우함수이다.

7.

$f(x)$ 는 우함수도 아니고 기함수도 아니다.

8.

$f(x)$ 는 기함수이다.

9.

$f(x)$ 는 우함수도 아니고 기함수도 아니다.

10.

$f(x)$ 는 기함수이다.

11.

(a) $f+g$ 는 우함수도 기함수도 아니다.

(b) $f \cdot g$ 는 기함수이다.

(c) $\frac{f}{g}$ 는 기함수이다.

(d) $\frac{g}{f}$ 는 기함수이다.

(e) $f \cdot f$ 는 우함수이다.

(f) $g \cdot g$ 는 우함수이다.

(g) $f \circ g$ 는 우함수이다.

(h) $g \circ f$ 는 우함수이다.

(i) $f \circ f$ 는 우함수이다.

(j) $g \circ g$ 는 기함수이다.

12.

 $g(x) = 2x + 3$

13.

 $g(x) = -(x-1)^2$

14.

 $g(x) = \sqrt{x+1} - 2$

15.

 $g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

16.

 $g(x) = |x+1| + 1$

17.

 x 축 대칭 : $g(x) = -\frac{1}{x-1},$

y 축 대칭 : $g(x) = -\frac{1}{x+1}$

원점 대칭 : $g(x) = \frac{1}{x+1}$

18.

 x 축 대칭 : $g(x) = -\frac{1}{x} - 2,$

y 축 대칭 : $g(x) = -\frac{1}{x} + 2$

원점 대칭 : $g(x) = \frac{1}{x} - 2$

19.

 x 축 대칭 : $g(x) = -\frac{1}{x^2} + x - 2$,

y 축 대칭 : $g(x) = \frac{1}{x^2} + x + 2$

원점 대칭 : $g(x) = -\frac{1}{x^2} - x - 2$

20.

 x 축 대칭 : $g(x) = -\sqrt{2x+1}$,

y 축 대칭 : $g(x) = \sqrt{1-2x}$

원점 대칭 : $g(x) = -\sqrt{1-2x}$

21.

 $f(x/2) = \frac{x^2}{4} - 2$

22.

 $2f(x) = 2\sqrt{x-1}$

23.

 $f(2x) = 1 - \sqrt{4x^2 - 1}$

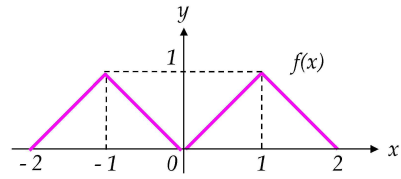
24.

 $f(x/2) = \frac{4x}{x^3 - 8}$

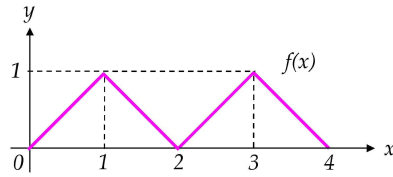
25.

 (a) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

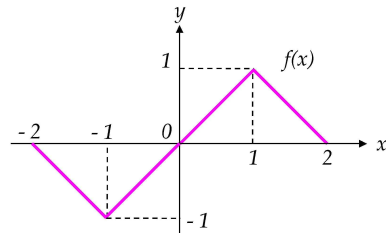
$$(b) f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x < -1 \\ -x, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



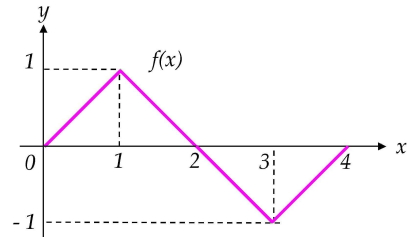
$$(c) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2, & 1 < x \leq 2 \\ x-2, & 2 < x \leq 3 \\ -x+4, & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$



$$(d) f(x) = \begin{cases} -x-2, & -2 \leq x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ -x+2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

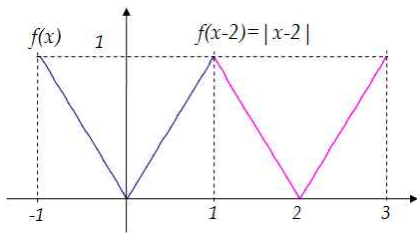


$$(e) f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2, & 1 < x \leq 3 \\ x-4, & 3 \leq x < 4 \end{cases}$$



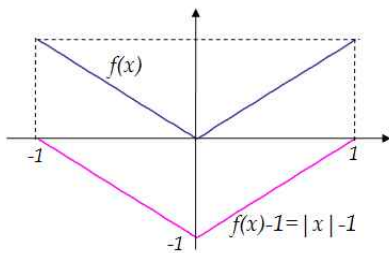
26.

풀이

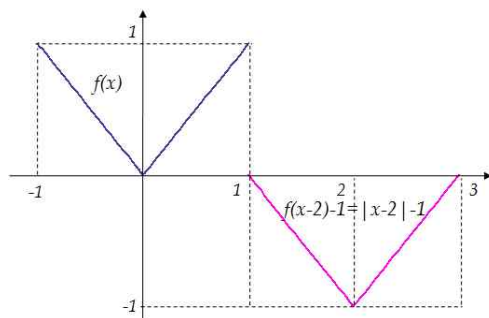


27.

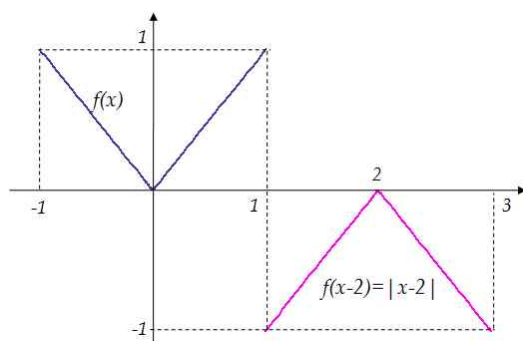
풀이



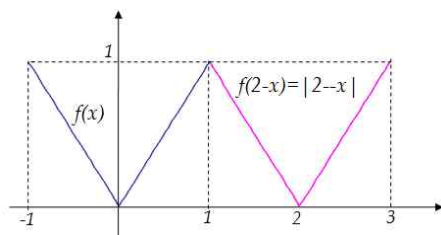
28.



29.

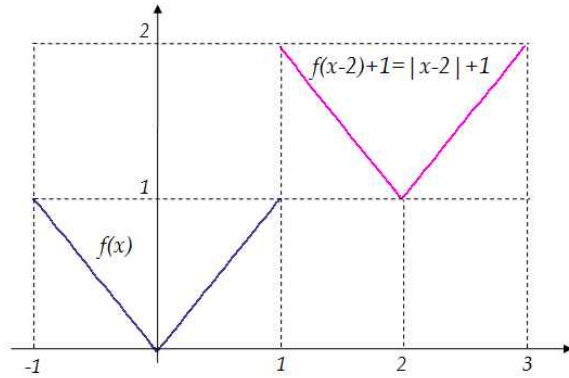


30.



31.

풀이



32.

풀이

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & , 0 \leq x < 1 \\ f(x-2), & \text{다른 곳에서} \end{cases}, f(2013) = f(1+2 \cdot 1006) = f(1) = 0$$

33.

풀이

$$f(x) = \begin{cases} -x & , -1 \leq x < 0 \\ x & , 0 \leq x < 1 \\ f(x-2), & \text{다른 곳에서} \end{cases}, f(2013) = f(1+2 \cdot 1006) = f(1) = 1$$

34.

풀이

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & , 0 \leq x < 1 \\ 0 & , 1 \leq x < 2 \\ f(x-2), & \text{다른 곳에서} \end{cases}, f(2013) = f(1+2 \cdot 1006) = f(1) = 0$$

35.

풀이

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , 1 < x \leq 2 \\ f(x-2), & \text{다른 곳에서} \end{cases}, f(2013) = f(1+2 \cdot 1006) = f(1) = 1$$

36.

풀이

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq 1 \\ -1 & , 1 < x \leq 2 \\ f(x-2), & \text{다른 곳에서} \end{cases}, f(2013) = f(1+2 \cdot 1006) = f(1) = 1$$

37.

풀이

$$f(x) = \begin{cases} -x & , -1 \leq x < 1 \\ f(x-2), & \text{다른 곳에서} \end{cases}, f(2013) = f(1+2 \cdot 1006) = f(1) = 1$$

38.

풀이

$$T = 1, f(2014) = f(0+1 \cdot 2014) = f(0) = 0$$

39.

$\frac{H}{\text{문}} \circledast T = 2, f(2014) = f(0 + 2 \cdot 1007) = f(0) = -1$

40.

$\frac{H}{\text{문}} \circledast T = 2, f(2014) = f(0 + 2 \cdot 1007) = f(0) = 1$

41.

$\frac{H}{\text{문}} \circledast T = 2, f(2014) = f(0 + 2 \cdot 1007) = f(0) = -1$

42.

$\frac{H}{\text{문}} \circledast T = 4, f(2014) = f(2 + 4 \cdot 503) = f(2) = -1$

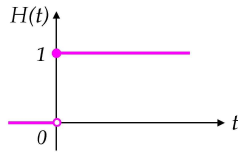
43.

$\frac{H}{\text{문}} \circledast T = 3, f(2014) = f(1 + 3 \cdot 671) = f(1) = 0$

44.

$\frac{H}{\text{문}} \circledast$

(a)



(b) $V(t) = 120H(t)$

(c) $V(t) = 240H(t-2)$

(d) $V(t) = 2tH(t), 0 \leq t \leq 60$

(e) $V(t) = 4tH(t-7), 7 \leq t \leq 32$

45.

$\frac{H}{\text{문}} \circledast g(x) = H(x-1)f(x)$

46.

$\frac{H}{\text{문}} \circledast$

(a)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & 2 \leq x < 3 \end{cases} = 2 \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

$$= 2[H(x-1) - H(x-2)]$$

$$(b) f(x) = 2[H(x) - 2H(x-1) + 2H(x-2) - 2H(x-3) + 2H(x-4) - 2H(x-5)]$$

47.

 $E(t) = 100[H(t-3) - H(t-6)]$

48.

 (a) $\text{dom}(f) = \{x \mid -k < x < k\}$ 이므로 $0 < x < k$ 에 대하여

$$|-x| = |x|, \quad (-x)^2 = x^2; \quad -(-x)^2 = -x^2; \quad k^2 - (-x)^2 = k^2 - x^2; \quad \sqrt{k^2 - (-x)^2} = \sqrt{k^2 - x^2} \text{ 이다.}$$

$$\text{다. 그러므로 } f(-x) = \frac{|-x|}{\sqrt{k^2 - (-x)^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{k^2 - x^2}} = f(x) \text{ 이고, 따라서 } f(x) \text{ 는 우함수이다.}$$

(b) 상수 k 가 증가하면 함수의 그래프는 x 축 방향으로 k 배만큼 늘어난다.