

Section 3.1 연습문제

1.

이

(a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ 가 존재하지 않는다.

(b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

2.

이

$\lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| = 0$

3.

이

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 는 존재하지 않는다.

4.

이

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{|x-2|}$ 는 존재하지 않는다.

5.

이

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x-1} = 1$

6.

이

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{3x+4} = \frac{1}{7}$

7.

이

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4} = 8$

8.

 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^4-16} = \frac{1}{32}$

9.

 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{1}{4}$

10.

 $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2x-1}{3x+2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

11.

 $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{x-8} = \frac{1}{3}$

12.

 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{\frac{x^3-27}{x-3}} = 3$

13.

 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

14.

 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

15.

 $\lim_{x \rightarrow 1} e^{(1-x)/(x^2-1)} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$

16.

 $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{1/(1-x)} = \infty$

17.

 $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{1/(1-x)} = 0$

18.

 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cos x = 0$

19.

 $\lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \frac{x-2}{x^2-4} = -2$

20.

 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$

21.

 $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \ln |\cos x| = -\infty$

22.

 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+2) - \ln 2}{x} = \sqrt{e}$

23.

 $\lim_{x \rightarrow 1} \sin^{-1} \left(\frac{1-x}{1-x^2} \right) = \frac{\pi}{6}$

24.

 $\lim_{x \rightarrow e} \cos^{-1}(\ln \sqrt{x}) = \frac{\pi}{3}$

25.

 $\lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{\pi}{4}$

26.

 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^{-1}(\tan^{-1} x) = \frac{\pi}{2}$

27.

 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x)^{1/x} = \frac{1}{e}$

28.

$$\textcircled{\text{II}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

29.

$$\textcircled{\text{II}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3x} = \frac{1}{3} \ln 2$$

30.

$$\textcircled{\text{II}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \frac{2}{3}$$

31.

$$\textcircled{\text{II}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 2x} = \frac{3}{2}$$

32.

$$\textcircled{\text{II}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x} = 0$$

33.

$$\textcircled{\text{II}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{cosec} 3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

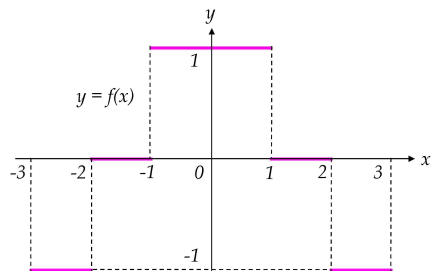
34.

$$\textcircled{\text{II}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 0$$

35.

$$\textcircled{\text{II}} \lim_{x \rightarrow 0} [2 - |x|] = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 2} [2 - |x|]$ 는 존재하지 않는다.

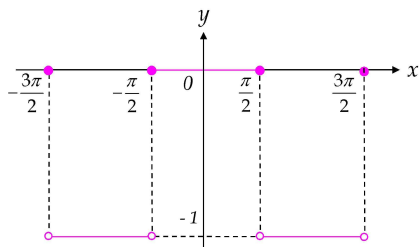


36.

$\frac{11}{10}$ 이

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

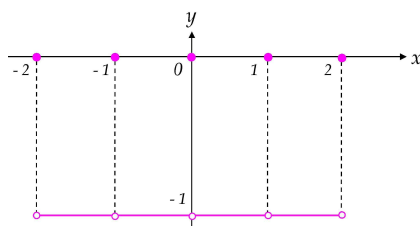


37.

$\frac{11}{10}$ 이

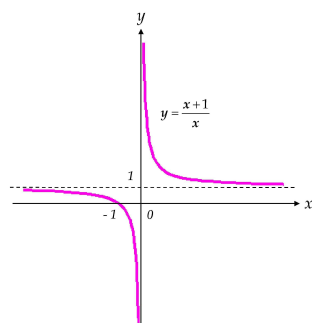
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x) = -1$$



38.

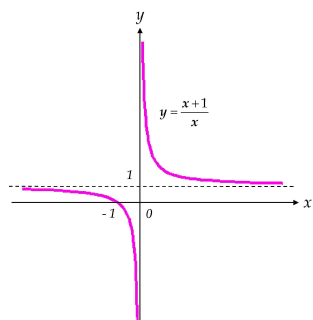
$\frac{11}{10}$ 이



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

39.

$\frac{0}{0}$ 이



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

40.

$\frac{0}{0}$ 이

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = -\infty$$

41.

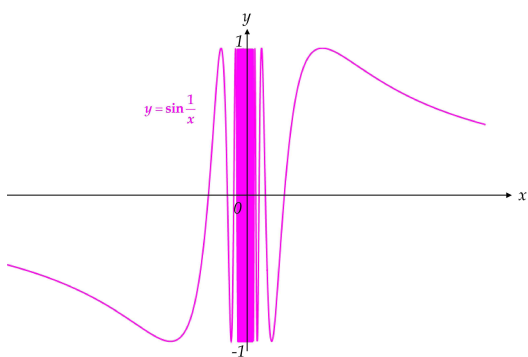
$\frac{0}{0}$ 이

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = \infty$$

42.

$\frac{0}{0}$ 이

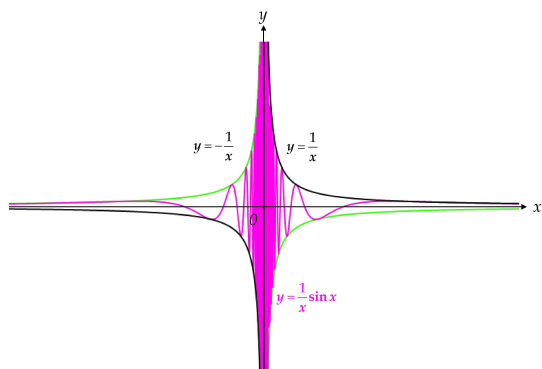
$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{은 존재하지 않는다.}$$



43.

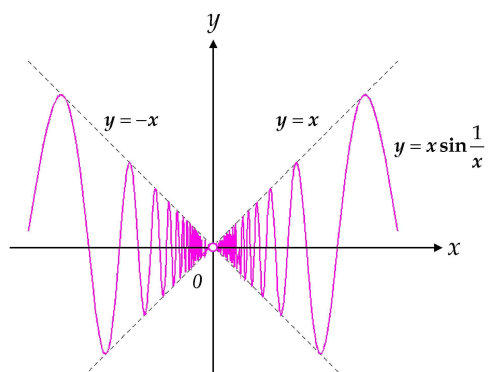
$\frac{0}{0}$ 이

$$\text{존재하지 않는다.}$$



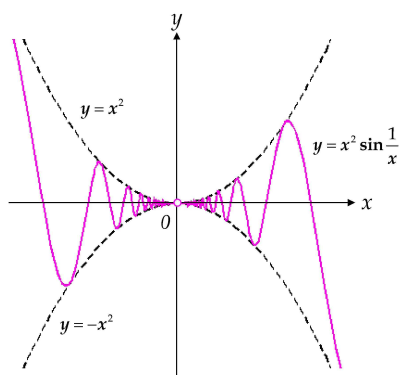
44.

$\frac{0}{0}$ 이 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$



45.

$\frac{0}{0}$ 이 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$



46.

 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$

47.

 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = 0$

48.

 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

49.

 극한은 존재하지 않는다.

50.

 $f(0) = 2$

51.

 $f(0) = \frac{2}{3}$

52.

 $\lim_{V \rightarrow 0^+} P = \infty, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} P = 0$ 이다.

53.



(a) v 가 증가하면, l 은 감소한다.

(b) $\lim_{v \rightarrow c^-} l = 0$

(c) 함수 $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ 의 정의역은 $[0, c]$ 이므로 $v > c$ 에서 극한을 생각할 수 없다.

Section 3.2 연습문제

1.

 풀이

(a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

(b) $y = -x + 2, y = -x - 2$

2.

 풀이

(a) $g'(x) = x^2 f'(x) + 2x f(x)$

(b) $g'(1) = 1$

3.

 풀이

$f'(0) = 0$

4.

 풀이

$y = -ex + 1 + e^2$

5.

 풀이

$y' = 2x + 2$

6.

 풀이

$y' = -\frac{5}{(3x-1)^2}$

7.

 풀이

$y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(1+x^2)^2}$

8.

 풀이

$y' = -\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

9.

 풀이

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

10.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

11.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + 1}{2(x^2 - 1)^2} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}}$$

12.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[3]{2^4}(x-1)}{3\sqrt[3]{x^5(1-2x)^2}}$$

13.

$$y' = (\ln 2)2^x + 2e^{2x}$$

14.

$$y' = (x^2 + 3x + 2)e^x$$

15.

$$y' = \cos x ((\ln 3)3^{\sin x} + 3\sin^2 x)$$

16.

$$y' = (\cos x - 2x \sin x \sin(x^2))e^{\cos x^2}$$

17.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x}$$

18.

$$\frac{dy}{dx} = \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}$$

19.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{1+x}+1}{2(x+\sqrt{1+x})\sqrt{1+x}}$$

20.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln x}{(x + \ln x)^2}$$

21.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cot(\ln x)}{x}$$

22.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \ln 2}{x (\ln 4x)^2}$$

23.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{(\ln 2)x(x^2 - 1)}$$

24.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x \ln 2x + 1)e^{2x}}{x}$$

25.

$$\frac{dy}{dx} = (1 + \ln x)x^x$$

26.

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1 + \sin x} (x \cos x \ln x + \sin x)$$

27.

$$\frac{dy}{dx} = 2x^{-1 + \ln x} \ln x$$

28.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\ln x)^{\ln x} (1 + \ln(\ln x))}{x}$$

29.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(1 + \ln x)}{x}$$

30.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 + x \cot x}{\sin x} \sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)$$

31.

$$\frac{dy}{dx} = x \cos x$$

32.

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x} \sec^2(e^{-x})$$

33.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$

34.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x(1 + \ln x)\sqrt{\ln x}}$$

35.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$$

36.

$$\frac{dy}{dx} = \tan^{-1} x$$

37.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cosh(x^2 + 1)$$

38.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

39.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \tanh \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

40.

$$\frac{II}{III} \circ I \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2(x^4 + 4x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

41.

$$\frac{II}{III} \circ I \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \tan x}{|\tan x|}$$

42.

$$\frac{II}{III} \circ I \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}}$$

43.

$$\frac{II}{III} \circ I \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}$$

44.

$$\frac{II}{III} \circ I \quad \frac{dy}{dx} = \tanh^{-1} x$$

45.

$$\frac{II}{III} \circ I \quad y' = \frac{2 - 3xy^2}{2x^2y}$$

46.

$$\frac{II}{III} \circ I \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{4y}$$

47.

$$\frac{II}{III} \circ I \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

48.

$$\frac{II}{III} \circ I \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x}{y - 2x}$$

49.

$$\frac{II}{III} \circ I \quad \frac{dy}{dx} = 3t^2 + 2t$$

50.

$$\frac{f}{f}이 \frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

51.

$$\frac{f}{f}이 \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{t}{2}$$

52.

$$\frac{f}{f}이 \frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{t^3 - 1}}{3t\sqrt{1 + t^2}}$$

53.

$$\frac{f}{f}이 y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

54.

$$\frac{f}{f}이$$

$$(a) \quad y' = (1 + x)^{-1}$$

$$y'' = (-1)(1 + x)^{-2}$$

$$y''' = (-1)^2 2! (1 + x)^{-3}$$

$$y^{(4)} = (-1)^3 3! (1 + x)^{-4}$$

$$(b) \quad y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! (1 + x)^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

55.

$$\frac{f}{f}이 f(x) = x^n 이면$$

$$f(z) - f(x) = z^n - x^n = (z - x) \cdot (z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1})$$

이므로, $f'(x)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} (z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + zx^{n-2} + x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

56.



(a) $g(x) = kf(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} \\ &= k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = kf'(x) \end{aligned}$$

(b) $h(x) = f(x) + g(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

(c) $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - g(x+h)] - [f(x) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) - g'(x) \end{aligned}$$

(d) $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) \\ &= [f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)] \end{aligned}$$

이므로 $F(x)$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ [f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)] \} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \lim_{h \rightarrow 0} [g(x+h) - g(x)] \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

(e) $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ 라 하면

$$\begin{aligned}
F(x+h) - F(x) &= \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{\{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)\} - \{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x)}{g(x+h)g(x)} - \frac{f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{g(x+h)g(x)}
\end{aligned}$$

이므로 $F(x)$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x)}{hg(x+h)g(x)} - \frac{f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{hg(x+h)g(x)} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x)}{hg(x+h)g(x)} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{hg(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)} \\
&\quad - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}$$

57.

풀이 n 이 음의 정수일 때, $n = -k$ 라 하면 k 는 양의 정수이다. 그러므로 [정리 3-11]의 (4)에 의하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^k}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(1) \cdot x^k - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x^k)}{(x^k)^2} \\ &= \frac{0 \cdot x^k - 1 \cdot (k x^{k-1})}{x^{2k}} = (-k) \frac{x^{k-1}}{x^{2k}} = -k x^{-k-1} = n x^{n-1}\end{aligned}$$

58.

풀이 $f'(x) = 1$

59.

풀이

- (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y}{2x - y^2}$
 (b) $y = -x + 6$
 (c) $(0, 0), (2^{4/3}, 2^{5/3})$

60.

풀이

(a) 수평접선을 갖는 좌표는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}t &= \frac{\pi}{4}; \quad x = \sin \frac{\pi}{4}, \quad y = \sin \frac{\pi}{2}; \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \\ t &= \frac{3\pi}{4}; \quad x = \sin \frac{3\pi}{4}, \quad y = \sin \frac{3\pi}{2}; \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right) \\ t &= \frac{5\pi}{4}; \quad x = \sin \frac{5\pi}{4}, \quad y = \sin \frac{5\pi}{2}; \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \\ t &= \frac{7\pi}{4}; \quad x = \sin \frac{7\pi}{4}, \quad y = \sin \frac{7\pi}{2}; \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)\end{aligned}$$

원점에서 접선의 방정식은 $y = -2x$, $y = 2x$ 이다.

(b) 수평접선을 갖는 좌표는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\pi}{6}; \quad x = \sin \frac{\pi}{3}, \quad y = \sin \frac{\pi}{2}; \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right) \\
 t &= \frac{3\pi}{6}; \quad x = \sin \pi, \quad y = \sin \frac{3\pi}{2}; \quad (0, -1) \\
 t &= \frac{5\pi}{6}; \quad x = \sin \frac{5\pi}{3}, \quad y = \sin \frac{5\pi}{2}; \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right) \\
 t &= \frac{7\pi}{6}; \quad x = \sin \frac{7\pi}{3}, \quad y = \sin \frac{7\pi}{2}; \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -1 \right) \\
 t &= \frac{9\pi}{6}; \quad x = \sin 3\pi, \quad y = \sin \frac{9\pi}{2}; \quad (0, 1) \\
 t &= \frac{11\pi}{6}; \quad x = \sin \frac{11\pi}{3}, \quad y = \sin \frac{11\pi}{2}; \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1 \right)
 \end{aligned}$$

원점에서 접선의 방정식은 $y = -\frac{3}{2}x$, $y = \frac{3}{2}x$ 이다.

61.



(a) $\theta = \cos^{-1}(\operatorname{sech} x)$ 이므로 $\cos \theta = \operatorname{sech} x$ 이다. 따라서 항등식 $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ 와 그림에 의하여 $\cos \theta = \frac{\tanh x}{\operatorname{sech} x} = \sinh x$, $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\operatorname{sech} x} = \cosh x$, $\sin \theta = \tanh x$ 이다.

(b) $x = \cos^{-1}(\operatorname{sech} \theta)$ 라 하면, $\operatorname{sech} \theta = \cos x$, $\theta = \operatorname{sech}^{-1}(\cos x)$ 이고

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) \text{이므로}$$

$$\theta = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} \right) = \ln \left(\frac{1 + \sin x}{\cos x} \right) = \ln(\sec x + \tan x) \text{이다.}$$

62.



(a) 190.53

(b) 중심으로부터 약 $x = -71.379(\text{m})$, $x = 71.379(\text{m})$ 떨어진 곳의 높이가 100m이다.

(c) $x = -71.379$, $x = 71.379$ 에서 아치의 기울기는 각각 다음과 같다.

$$f'(-71.379) = (0.69168) \sinh(0.033 \times (-71.379)) = (0.69168)(-5.22428) = -3.61$$

$$f'(71.379) = (0.69168) \sinh(0.033 \times (71.379)) = (0.69168)(5.22428) = 3.61$$

Section 3.3 연습문제

1.

 감소하는 구간 : $-1 \leq x \leq 1$, 증가하는 구간 : $1 \leq x \leq 3$

2.

 감소하는 구간 : $1 \leq x \leq 2$, 증가하는 구간 : $-2 \leq x \leq 1$

3.

 감소하는 구간 : $-1 \leq x < 0$, $0 < x \leq 1$, 증가하는 구간 : $-2 \leq x < -1$, $1 \leq x < 2$

4.

 감소하는 구간 : $-2 \leq x \leq -\frac{2}{3}$, $0 < x \leq 2$, 증가하는 구간 : $-\frac{2}{3} \leq x < 0$

5.

 감소하는 구간 : $-\pi \leq x \leq -\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$, 증가하는 구간 : $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

6.

 감소하는 구간 : $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, 증가하는 구간 : $-\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$

7.

 감소하는 구간 : $0 < x \leq 1$, 증가하는 구간 : $1 \leq x \leq e$

8.

 감소하는 구간 : $-1 < x \leq \frac{3}{2}$, 증가하는 구간 : $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

9.

 아래로 볼록인 구간 : $-2 < x < 1$

위로 볼록인 구간 : $1 < x < 4$

10.

 아래로 볼록인 구간 : $-3 < x < 0$

위로 볼록인 구간 : $0 < x < 3$

11.

 아래로 블록인 구간 : $0 < x < 2$

위로 블록인 구간 : $-2 < x < 0$

12.

 아래로 블록인 구간 : $-6 < x < 0, 0 < x < 2$

위로 블록인 구간 : $-7 < x < -6$

13.

 아래로 블록인 구간 : $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$

위로 블록인 구간 : $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$

14.

 아래로 블록인 구간 : $-\pi < x < 0$

위로 블록인 구간 : $0 < x < \pi$

15.

 아래로 블록인 구간 : $0 < x < 3$

16.

 아래로 블록인 구간 : $-1 < x < 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} < x < 3e$

위로 블록인 구간 : $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$

17.

 $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$

18.



[연습문제 1]

x	-1	...	1	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	
			-4		

[연습문제 2]

x	-2	$\dots$	1	$\dots$	2
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	
			1		

[연습문제 3]

x	-2	$\dots$	-1	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	
			-2				2		

[연습문제 4]

x	-2	$\dots$	$-2/3$	$\dots$	0	$\dots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\searrow$	
			$-5/4$				

[연습문제 5]

x	$-\pi$	$\dots$	$-3\pi/4$	$\dots$	$\pi/4$	$\dots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	
			$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		

[연습문제 6]

x	$-\pi$	$\dots$	$-\pi/3$	$\dots$	$\pi/3$	$\dots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	
			$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$		$-\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$		

[연습문제 7]

x	0	$\dots$	1	$\dots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	
			1		

[연습문제 8]

x	-1	$\dots$	$3/2$	$\dots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	
			$-\frac{e^3}{2}$		

19.



[연습문제 9]

$$\text{극댓값 } f\left(\frac{3-\sqrt{15}}{3}\right) = \frac{-9+10\sqrt{15}}{9}, \quad \text{극솟값 } f\left(\frac{3+\sqrt{15}}{3}\right) = \frac{-9-10\sqrt{15}}{9}$$

[연습문제 10]

$$\text{극솟값 } f\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{9}{2}, \quad \text{극댓값 } f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

[연습문제 11]

$$\text{극댓값 } f(-1) = -2, \quad \text{극솟값 } f(1) = 2$$

[연습문제 12]

$$\text{극솟값 } f(-4) = -\frac{1}{8}$$

[연습문제 13]

극값을 판정할 수 없다.

[연습문제 14]

극값은 없다.

[연습문제 15]

극값은 없다.

[연습문제 16]

$$\text{극솟값 } f(0) = 0, \quad \text{극댓값 } f(2) = 4e^{-2} \text{이다.}$$

20



$$x = 5(3 - \sqrt{3})$$

21.

 최대 부피는 500cm^3 이다.

22.

 구하고자 하는 곡선 위의 점은 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ 이다.

23.

 두 철선의 길이는 $y = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, $z = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$ 이다.

24.



(a) 평균속도는 $\bar{v} = -1.5$ 이다.

(b) 2초 후에 이 입자는 처음 출발할 때의 위치에 놓이게 된다.

(c) $t = 1$

(d) 속도는 $v(1.5) = -3(\text{m/s})$ 이고, 속력은 $|v(1.5)| = 3(\text{m/s})$ 이다.

25.

 $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ 부근에서 극대이면서 최대가 된다. 따라서 물줄기의 최대 부피는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2} \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{3+3\sqrt{3}}{8}$$

26.

 $\theta = \pi/6$ 이다.

27.

 $t = 50$ 이고, 제동을 걸기 시작하여 완전히 멈출 때까지 움직인 거리는 $x(t) = 3750(\text{m})$ 이다.

28.

 20초 후에 정지하게 된다. 또한 20초 후에 정지할 때까지 움직인 거리는 $x(t) = 1000(\text{m})$ 이다.

29.

풀이

(a) 물체의 높이는 $\frac{1}{4}$ (cm)이고, 물체의 속도는 4(cm/sec)이다.

(b) 최대 높이는 $\frac{5}{12}$ (cm)이다.

Section 3.4 연습문제

1.

 $c = \sqrt{5}$

2.

 $c = \frac{1}{2}$

3.

 $c = \sin^{-1} \frac{2}{\pi}$

4.

 $c = \frac{2}{81}(-65 + 4\sqrt{97})$

5.

 $c = \cos^{-1} \frac{2}{\pi}$

6.

 $c = \frac{-2 + e^2 + \sqrt{e^4 + 4e^2 - 16e + 12}}{4(e - 1)}$

7.

 $dy = 2(4x - 1) dx$

8.

 $dy = (x + 1)e^x dx$

9.

 $dy = (\cos x - 2\sin x) dx$

10.

 $dy = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 3}} dx$

11.

$$\textcircled{\text{II}} \textcircled{\text{III}} \textcircled{\text{IV}} \quad dy = \frac{x-1}{x} dx$$

12.

$$\textcircled{\text{II}} \textcircled{\text{III}} \textcircled{\text{IV}} \quad dy = \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) dx$$

13.

$$\textcircled{\text{II}} \textcircled{\text{III}} \textcircled{\text{IV}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$$

14.

$$\textcircled{\text{II}} \textcircled{\text{III}} \textcircled{\text{IV}} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^3 + 4x)}{\ln x} = 1$$

15.

$$\textcircled{\text{II}} \textcircled{\text{III}} \textcircled{\text{IV}} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \ln(\sin x)) = 0$$

16.

$$\textcircled{\text{II}} \textcircled{\text{III}} \textcircled{\text{IV}} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = -\frac{1}{2}$$

17.

$$\textcircled{\text{II}} \textcircled{\text{III}} \textcircled{\text{IV}} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan x = 1$$

18.

$$\textcircled{\text{II}} \textcircled{\text{III}} \textcircled{\text{IV}} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \tan \frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi}$$

19.

$$\textcircled{\text{II}} \textcircled{\text{III}} \textcircled{\text{IV}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{x} = \ln 2$$

20.

$$\textcircled{\text{II}} \textcircled{\text{III}} \textcircled{\text{IV}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{2^{\sin x} - 1} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

21.

 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

22.

 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$

23.

 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{1/x} = e^{-2}$

24.

 $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\tan(\pi x/2)} = e^{2/\pi}$

25.

 10

26.

 최솟값은 4이고 최댓값은 16이다.

27.

 일반성을 잃지 않고 $a < b$ 라 하자. 그리고 $f(x) = \sin x$ 라 하면 $f(x)$ 는 모든 실수에서 미분 가능하므로 $f(x)$ 는 (a, b) 에서 미분 가능하고 $[a, b]$ 에서 연속이다. 따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\sin b - \sin a}{b - a} = f'(c) = \cos c$$

인 c 가 (a, b) 안에 존재한다. 한편 $-1 \leq \cos c \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \leq 1; \quad \left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| \leq 1$$

이다. 따라서 $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ 또는 $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ 이다.

28.

 $F(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면, $f'(x) = g'(x)$ 이므로 $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ 이다. 한편 [정리 3-39]의 (1)에 의하여 $F'(x) = 0$ 이면 $F(x) = C$ (C 는 상수)이므로 $f(x) - g(x) = C$ 이다.

29.

 $x < 0$ 이면 $f(x) = g(x)$ 이므로 $f'(x) = g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ 이고 $f(x) - g(x) = 0$ 이다. 한편 $x > 0$ 이면 $f'(x) = g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ 이고 $f(x) - g(x) = 1$ 이다. 그러므로 임의의 상수 C 에 대하여 $f(x) - g(x) = C$ 라고 할 수 없다. 그 이유는 $x = 0$ 에서 두 함수 f 와 g 가 미분 가능하지 않기 때문이다.

30.

 첫 번째 경찰차를 지나는 순간의 시각을 $t = 0$ 이라 하면, 두 번째 경찰차를 지나는 순간의 시각은 $t = 8/60 = 2/15$ (h)이다. 이제 승용차가 지나간 거리를 $s(t)$ 라 하면, $s(0) = 0$, $s(1/12) = 15$ 이므로 이 승용차가 8분 동안 고속도로를 주행한 평균속도는

$$\frac{s(1/12) - s(0)}{(1/12) - 0} = \frac{15}{2/15} = 112.5 \text{ (km/h)}$$

이다. 따라서 평균값 정리에 의하여 8분 사이에 승용차의 순간속도가 $s'(t_0) = 112.5 \text{ (km/h)}$ 인 시각 t_0 이 존재한다.

31.

 시각 t 에서 온도계의 온도를 $T(t)$ 라고 하자. 그러면 $T'(t)$ 는 시각 t 에서 온도계의 순간온도 변화율 즉, 수은의 순간변화율이다. 이때 $T(0) = -20$, $T(10) = 100$ 이므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{T(10) - T(0)}{10 - 0} = \frac{100 - (-20)}{10} = 12 = T'(t_0)$$

를 만족하는 $0 < t_0 < 14$ 가 존재한다.

32.

 $\Delta V \approx 0.157$