

Section 4.1 연습문제

1.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int (2x-1) dx = x^2 - x + C$$

2.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int (3x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x - 1) dx = \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x + C$$

3.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

4.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln x + C$$

5.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - x + C$$

6.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

7.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = x + \cos x + C$$

8.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

9.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^3 + 1) dx = 2 \left(\frac{7}{10} - 0 \right) = \frac{7}{5}$$

10.

$$\textcircled{\text{II}} \int_1^2 (2 + x - 3x^4) dx = -\frac{151}{10}$$

11.

$$\textcircled{\text{II}} \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^3} dx = -\frac{3}{8} + \ln 2$$

12.

$$\textcircled{\text{II}} \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \frac{3}{2} + \ln 4$$

13.

$$\textcircled{\text{II}} \int_0^1 x \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3} \right) dx = \frac{61}{77}$$

14.

$$\textcircled{\text{II}} \int_{-1}^2 (3^x - 2^x) dx = \frac{26}{3 \ln 3} - \frac{7}{2 \ln 2}$$

15.

$$\textcircled{\text{II}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x| dx = 2$$

16.

$$\textcircled{\text{II}} \int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos x| dx = -2 + 2\sqrt{2}$$

17.

$$\textcircled{\text{II}} \frac{d}{dx} \int_0^{2x} \frac{1}{t^4 + 1} dt = \frac{2}{x^4 + 1}$$

18.

$$\textcircled{\text{II}} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2-x} (1 + \sqrt{t})^2 dt = (2x-1)(1 + \sqrt{x^2-x})^2$$

19.

$\frac{11}{10}$ 이 $\frac{d}{dx} \int_{-x}^{x^2} \frac{t^3}{1+t^2} dt = \frac{x^3(2x^6+x^4-1)}{(1+x^4)(1+x^2)}$

20.

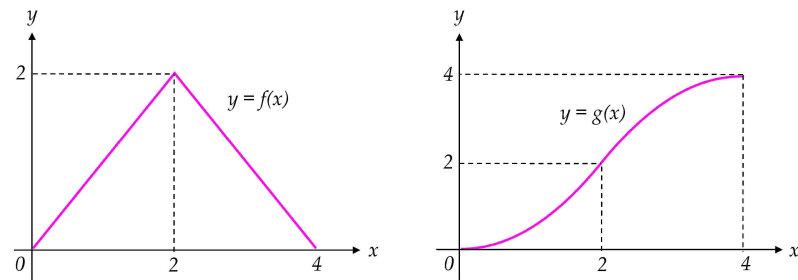
$\frac{11}{10}$ 이 $\frac{d}{dx} \int_{\tan x}^{\sin^2 x} \sin^{-1} 3t dt = \sin 2x \sin^{-1}(3 \sin^2 x) - \sec^2 x \sin^{-1}(3 \tan x)$

21.

$\frac{11}{10}$ 이

(a) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & , 0 \leq x \leq 2 \\ 4x - \frac{1}{2}x^2 - 4 & , 2 < x \leq 4 \end{cases}$

(b)



(c) $f(x)$ 는 $x \neq 2$ 인 모든 $0 < x < 4$ 에서 미분 가능하다.

(d) $g(x)$ 는 모든 $0 < x < 4$ 에서 미분 가능하다.

22.

$\frac{11}{10}$ 이 $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$

23.

$\frac{11}{10}$ 이 $c = \sqrt[3]{10}$

24.

$\frac{11}{10}$ 이 $c = \sin^{-1} \frac{2}{\pi}$

25.

 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^4} dt = 0$

26.

 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^{2x} \sin t dt = 2$

27.

 적분의 평균값 정리에 의하여 함수 f 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이면

$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$ 를 만족하는 c 가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다. 따라서 조건에 의하여 $f(c)(b-a) = 0$ 을 만족하는 c 가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다. 이와 같은 c 에 대하여 $b-a \neq 0$ 이므로 $f(c) = 0$ 이어야 한다. 즉, $f(c) = 0$ 을 만족하는 c 가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다.

28.

 $f(x) = 2x$

29.

 $f(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x} + \frac{1}{2x}$

30.

 $f(x) = \pi x \cos \pi x + \sin \pi x$

31.

 $f(x) = -\frac{2}{(2+x)^2}$

32.

 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^4}{n^5} = \frac{1}{5}$

33.

 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi \sin(k\pi/n)}{n} = 2$

34.

풀이

(a) $\frac{2}{3}(\text{m})$

(b) $5(\text{m})$

35.

풀이

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad C'(t) &= \frac{1}{t^2} \left[\left(\frac{d}{dt} \int_0^t [f(x) + g(x)] dx \right) t - \int_0^t [f(x) + g(x)] dx \right] \\ &= \frac{1}{t^2} \left([f(t) + g(t)] t - \int_0^t [f(x) + g(x)] dx \right) \end{aligned}$$

이고 C 의 임계점은 $C'(t) = 0$ 을 만족하는 t 이므로

$$C'(t) = \frac{1}{t^2} \left([f(t) + g(t)] t - \int_0^t [f(x) + g(x)] dx \right) = 0$$

을 만족한다. 즉,

$$\begin{aligned} [f(t) + g(t)] t - \int_0^t [f(x) + g(x)] dx &= 0 \\ f(t) + g(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t [f(x) + g(x)] dx = C(t) \end{aligned}$$

을 만족한다. 그러므로 구하고자 하는 임계점은 $C(t) = f(t) + g(t)$ 를 만족하는 t 이다.

(b) $t_0 = 30$

(c) C 의 최솟값은 다음과 같다.

$$C\left(\frac{43}{2}\right) = \frac{197v}{3600}$$

Section 4.2 연습문제

1.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int (2x+1)^5 dx = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + C$$

2.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int (x^2+2x-1)^3(x+1)dx = \frac{1}{8}(x^2+2x-1)^4 + C$$

3.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C$$

4.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int x e^{x^2-1} dx = \frac{1}{2}e^{x^2-1} + C$$

5.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| + C$$

6.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{dx}{x(\ln x) \ln(\ln x)} = \ln |\ln(\ln x)| + C$$

7.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

8.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \ln |x^2-1| + C$$

9.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \sec 2x \tan 2x dx = \frac{1}{2} \sec 2x + C$$

10.

$$\int \frac{\tan(\pi/x)}{x^2} dx = \frac{1}{\pi} \ln \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| + C$$

11.

$$\int \sqrt{3x+2} \, dx = \frac{2}{9}(3x+2) \sqrt{3x+2} + C$$

12.

$$\int (x^2+1) \sqrt[4]{x^3+3x} \, dx = \frac{4}{15}(x^3+3x) \sqrt[4]{x^3+3x} + C$$

13.

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

14.

$$\int x^2 \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

15.

$$\int (x^2 - x + 1) e^{-x} \, dx = -(x^2 + x + 2) e^{-x} + C$$

16.

$$\int x^2 e^x \, dx = (x^2 - 2x + 2) e^x + C$$

17.

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\sin x + \cos x) + C$$

18.

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C$$

19.

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{9} (-1 + 3 \ln x) + C$$

20.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \log_2 x \, dx = \frac{x}{\ln 2}(-1 + \ln x) + C$$

21.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx = -\frac{1 + \ln x}{x}$$

22.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x}(-2 + \ln x) + C$$

23.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \cos^{-1} x \, dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + C$$

24.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \sinh^{-1} x \, dx = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1 + x^2} + C$$

25.

$\textcircled{\text{풀이}} u = \sec x, v' = \sec^2 x$ 이라 하면, $u' = \sec x \tan x, v = \tan x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x - \int (\sec x \tan x) \tan x \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \end{aligned}$$

이다. 그러므로 좌변과 우변을 정리하면

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \, dx$$

이고, $\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C_1$ 이므로, 구하고자 하는 부정적분은

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C, \quad C = \frac{1}{2} C_1$$

이다.

26.

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

27.

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} - \tan^{-1} x + C$$

28.

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^3} dx = \ln |x-1| - \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

29.

$$\int \frac{x^3 - 2}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+1)^3}{x-1} \right| + C$$

30.

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2} = \ln |x| - \frac{1}{2} \left(\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \right) + C$$

31.

$$\int \frac{x^4 + 16}{x(x^2 + 4)^2} dx = \ln |x| + \frac{4}{x^2 + 4} + C$$

32.

$$\int \sin^3 x dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

33.

$$\int \cos^6 x dx = \frac{1}{8} \left(\frac{5}{2} x + 2 \sin 2x + \frac{3}{8} \sin 4x - \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + C$$

34.

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

35.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + C$$

36.

$$\int \tan^4 x \, dx = x - \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

37.

$$\int \cot^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \cot^2 x - \ln |\sin x| + C$$

38.

$$\int \sin x \cos 2x \, dx = \frac{1}{6} (3 \cos x - \cos 3x) + C$$

39.

$$\int \sin x \cos 3x \sin 5x \, dx = \frac{1}{4} \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{7} \sin 7x - \frac{1}{9} \sin 9x \right) + C$$

40.

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C$$

41.

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\cot \frac{x}{2} + C$$

42.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-1 + \tan x}{1 + \tan x} \right| + C$$

43.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - 2 \sin^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \tan x}{1 - \sqrt{2} \tan x} \right| + C$$

44.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-x}} \, dx = -\frac{2}{3} (x+6) \sqrt{3-x}$$

45.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{x}{(x-1)\sqrt{2-x}} dx = -2\sqrt{2-x} - \ln \left| \frac{1+\sqrt{2-x}}{1+\sqrt{2-x}} \right| + C$$

46.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{x}{1-x}} + C$$

47.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx = \ln \left| \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}} \right| + 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} + C$$

48.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2-1} + \ln |x + \sqrt{x^2-1}|) + C$$

49.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}} = \ln |x-1 + \sqrt{x^2-2x+2}| + C$$

50.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \frac{2}{3}$$

51.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx = \frac{1}{3}$$

52.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x} dx = 1$$

53.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x (1+\cos x)} dx = -\frac{1}{6} + \frac{\ln 3}{4}$$

54.

 $\int_1^{64} (\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}) dx = \frac{68603}{5}$

55.

 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

56.

 $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{2(1+\sqrt{2})}{15}$

57.

 $\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{\pi}{12}$

58.

 $u = \sin^{n-1} x, v' = \sin x$ 라 하면, $u' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x, v = -\cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \sin^n x dx &= \sin^{n-1} x (-\cos x) + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \end{aligned}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} n \int \sin^n x dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx \\ \int \sin^n x dx &= -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \end{aligned}$$

59.

$u = \cos^{n-1} x$, $v' = \cos x$ 라 하면, $u' = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x$, $v = \sin x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \cos^n x dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int \cos^n x dx\end{aligned}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}n \int \cos^n x dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx \\ \int \cos^n x dx &= \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx\end{aligned}$$

60.

(a) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \frac{2}{3}$

(b) $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{16}$

Section 4.3 연습문제

1.

$$\textcircled{\text{필요}} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

2.

$$\textcircled{\text{필요}} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}$$

3.

$$\textcircled{\text{필요}} \int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \frac{\pi}{4}$$

4.

$$\textcircled{\text{필요}} \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx = \frac{1}{4}$$

5.

$$\textcircled{\text{필요}} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \infty$$

6.

$$\textcircled{\text{필요}} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2}$$

7.

$$\textcircled{\text{필요}} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2}$$

8.

$$\textcircled{\text{필요}} \int_0^{\infty} e^{-2x} \cos x dx = \frac{1}{2}$$

9.

$$\textcircled{\text{필요}} \int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{8}$$

10.

 $\int_0^{\infty} \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{8}$

11.



(a) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} \Big|_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} (1 - e^{-\lambda x}) = 1 \end{aligned}$$

이므로 $f(x)$ 는 확률밀도함수이다.

(b) $\frac{1}{\lambda}$

(c) $\frac{2}{\lambda^2}$

(d) $\frac{1}{\lambda^2}$

12.



$p < 1$ 이면 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}$ 로 수렴한다.

13.



[연습문제 5]와 [예제 4-33]에 의하여 명백히 성립한다.

14.



$p < 1$ 일 때 수렴한다.

15.



$p < 1$ 일 때 수렴한다.

16.

 [예제 4-32(b)]에 의하여 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$ 이다.

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \tan^{-1} x \Big|_{-a}^a = \lim_{a \rightarrow \infty} (\tan^{-1} a - \tan^{-1}(-a)) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} 2 \tan^{-1} a = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

이므로 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{1+x^2}$ 이다.

17.

 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{2x dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{2x dx}{1+x^2}$ 이고

$$\int_0^{\infty} \frac{2x dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{2x dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(x^2+1) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b^2+1) = \infty$$

이다. 따라서 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{1+x^2}$ 은 수렴하지 않는다. 그러나

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{2x dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln(x^2+1) \Big|_{-a}^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln \frac{a^2+1}{(-a)^2+1} = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln 1 = 0$$

이므로 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x dx}{1+x^2} \neq \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{2x dx}{1+x^2}$ 이다.

18.

 [예제 4-32(a)]에 의하여 $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ 이고 $e^{-x} \geq e^{-x^2}$ 이므로 [정리 4-9]의 (1)에 의하여 명백히 성립한다.

19.

 (a) 로피탈의 정리를 n 번 반복하면 다음과 같이 명백히 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

(b) 유한구간 $[1, M]$ 에서 피적분함수 $x^{n-1}e^{-x}$ 은 연속이므로 $\int_1^M x^{n-1}e^{-x}dx$ 는 존재한다.

한편 $x \geq M$ 일 때 $0 < \frac{x^{n-1}}{e^x} \leq \frac{1}{x^2}$ 이고 [예제 4-33]에 의하여 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ 이 수렴하므로

$\int_M^\infty \frac{1}{x^2}dx$ 도 수렴한다. 따라서 [정리 4-9]에 의하여 $\int_M^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ 는 수렴한다. 따라서

$$\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \int_1^M x^{n-1}e^{-x}dx + \int_M^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

도 역시 수렴한다.

20.



(a) [예제 4-32(a)]에 의하여 $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$ 이다.

(b) 부분적분법에 의하여

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a x^n e^{-x} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^n}{e^x} \Big|_0^a + n \int_0^a x^{n-1} e^{-x} dx \right) = -\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^n}{e^a} + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \end{aligned}$$

이다. 한편 로피탈의 정리를 n 번 반복하면 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^n}{e^a} = 0$ 이므로

$$\Gamma(n+1) = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n \Gamma(n)$$

이 성립한다.

(c) (b)에 의하여

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \cdots \\ &= n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \Gamma(1) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n! \end{aligned}$$

(d) $\Gamma(5) = 4! = 24$

21.

 $W = \frac{1.568 \times 10^{10}}{3690} \approx 3.96 \times 10^6 \text{ (N)}$

Section 4.4 연습문제

1.

 $S = \frac{16}{15}$

2.

 $S = 3\sqrt{3} - 2$

3.

 $S = 2$

4.

 $S = \frac{\pi}{2}$

5.

 $S = \frac{28\sqrt{6}}{5}$

6.

 $S = \frac{25 - 17\sqrt{17}}{6}$

7.

 $S = 1 - \frac{\pi}{4}$

8.

 $S = 2$

9.

 $S = \frac{5}{12}$

10.

 $S = \frac{5}{6}$

11.

 $V = \frac{8\pi}{3}$

12.

 $V = \pi(\pi - 2)$

13.

 $V = \frac{3\pi}{4}$

14.

 $V = \frac{2\pi}{3}$

15.

 $V = \frac{3\pi}{2}$

16.

 $V = \frac{\pi}{6}$

17.



(a) $V = \frac{8\pi}{3}$

(b) $V = \frac{224\pi}{15}$

18.

 $V = \frac{\pi}{30}$

19.

 $V = \frac{\pi}{48}$

20.

$$\textcircled{\text{필요}} \quad V = \frac{3\pi}{2}$$

21.

$$\textcircled{\text{필요}} \quad V = 4\pi^2$$

22.

$$\textcircled{\text{필요}} \quad V = \pi (1 - e^{-9})$$

23.

$$\textcircled{\text{필요}} \quad l = \frac{2}{27} (-1 + 82\sqrt{82})$$

24.

$$\textcircled{\text{필요}} \quad l = \frac{\pi}{6}$$

25.

$$\textcircled{\text{필요}} \quad l = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} \right)$$

26.

$$\textcircled{\text{필요}} \quad l = \sqrt{2} + \sinh^{-1} 1$$

27.

$$\textcircled{\text{필요}} \quad l = \sinh 2$$

28.

$$\textcircled{\text{필요}} \quad l = 2 \ln \frac{4}{3}$$

29.

$$\textcircled{\text{필요}} \quad l = 12$$

30.

$$\textcircled{\text{필요}} \quad l = \sqrt{2} (e^{2\pi} - 1)$$

31.

$$\textcircled{\text{II}} A = \frac{\pi}{27}(-1 + 145\sqrt{145})$$

32.

$$\textcircled{\text{II}} A = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$$

33.

$$\textcircled{\text{II}} l = \sqrt{89} + \frac{25}{8} \sinh^{-1} \frac{8}{5}$$