

Section 6.1 연습문제

1.

 $a_1 = 1, a_2 = \frac{4}{3}, a_3 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{8}{5}, a_5 = \frac{5}{3}$

2.

 $a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{5}{8}, a_3 = \frac{9}{26}, a_4 = \frac{17}{80}, a_5 = \frac{3}{22}$

3.

 $a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{6}, a_4 = \frac{1}{24}, a_5 = -\frac{1}{120}$

4.

 $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}$

5.

 $f(x) = \frac{x}{2x-1}$

6.

 $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$

7.

 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

8.

 $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

9.

 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}$

10.

 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = 1$

11.

 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2} = 0$

12.

 양의 부호와 음의 부호를 교대로 가지면서 ∞ 와 $-\infty$ 으로 발산한다.

13.

 양의 부호와 음의 부호를 교대로 가지면서 2와 -2 으로 발산한다.

14.

 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{3n} = e^{3/2}$

15.

 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n\pi}{3n-1} = \frac{1}{2}$

16.

 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2+n-1}{n^2+n}} = 1$

17.

 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(3n+1)} = 1$

18.

 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^n - 1}{e^{2n} + 1} = 0$

19.



(a) 단리이율은 3.6%이다.

(b) 투자기간은 9년 6개월이다.

20.

풀이

(a) 연이율은 3.42%이다.

(b) $t = 8.16$ 년

21.

풀이

(a) $p_n = 1.1P_{n-1} - 500$, $p_0 = 10000$

(b) $p_1 = 10500$, $p_2 = 11050$, $p_3 = 11655$, $p_4 = 12321$, $p_5 = 13052$, $p_6 = 13858$

Section 6.2 연습문제

1.

 $\frac{11}{4}$

2.

 주어진 급수는 수렴하지 않는다.

3.

 3

4.

 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 4n + 3} = \frac{5}{6}$

5.

 발산한다.

6.

 발산한다.

7.

 수렴한다.

8.

 발산한다.

9.

 발산한다.

10.

 수렴한다.

11.

 발산한다.

12.

$\frac{p}{q}$ 이 수렴한다.

13.

$\frac{p}{q}$ 이 수렴한다.

14.

$\frac{p}{q}$ 이 발산한다.

15.

$\frac{p}{q}$ 이 수렴한다.

16.

$\frac{p}{q}$ 이 발산한다.

17.

$\frac{p}{q}$ 이 수렴한다.

18.

$\frac{p}{q}$ 이 수렴한다.

19.

$\frac{p}{q}$ 이 절대수렴한다.

20.

$\frac{p}{q}$ 이 조건부 수렴한다.

21.

$\frac{p}{q}$ 이 $p > 0$

22.

$\frac{p}{q}$ 이 $p > 1$

23.

$\frac{p}{q}$ 이 $p = 1$ 일 때 최댓값 $f(1) = 1$ 을 갖는다.

24.

 제거된 정사각형의 넓이는 1이고 남은 부분의 넓이는 0이다.

Section 6.3 연습문제

1.

$$\frac{\text{문제}}{\text{이}} \frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

2.

$$\frac{\text{문제}}{\text{이}} \frac{x^2}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+2}$$

3.

$$\frac{\text{문제}}{\text{이}} \frac{1+x}{1-x} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

4.

$$\frac{\text{문제}}{\text{이}} \frac{3}{x^2-x-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n$$

5.

$$\frac{\text{문제}}{\text{이}} \ln(1-x^2) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n}$$

6.

$$\frac{\text{문제}}{\text{이}} \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

7.

$$\frac{\text{문제}}{\text{이}} -3 < x < 3$$

8.

$$\frac{\text{문제}}{\text{이}} -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

9.

$$\frac{\text{문제}}{\text{이}} -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

10.

 모든 실수에서 수렴한다.

11.

 $-1 \leq x \leq 1$

12.

 $0 \leq x \leq 2$

13.

 $-1 \leq x \leq 1$

14.

 모든 실수에서 수렴한다.

15.

 모든 실수에서 수렴한다.

16.

 모든 실수에서 수렴한다.

17.


$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}$$

18.


$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-1)^{n-1}$$

19.


$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(2n-1) x^{2n-2}$$

20.


$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

21.

$$\textcircled{\text{II}} \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

22.

$$\textcircled{\text{II}} \int \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} x^{n+1}$$

23.

$$\textcircled{\text{II}} \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-3)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (x-3)^{n+1}$$

24.

$$\textcircled{\text{II}} \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Section 6.4 연습문제

1.

$$\frac{\text{문제 풀이}}{\text{문제 풀이}} \frac{x^2 + 1}{1 + x} = 1 - x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^n$$

2.

$$\frac{\text{문제 풀이}}{\text{문제 풀이}} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = 3x - 1 - 2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^n$$

3.

$$\frac{\text{문제 풀이}}{\text{문제 풀이}} e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

4.

$$\frac{\text{문제 풀이}}{\text{문제 풀이}} e^{x/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} x^n$$

5.

$$\frac{\text{문제 풀이}}{\text{문제 풀이}} \ln(1 - x^2) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n}$$

6.

$$\frac{\text{문제 풀이}}{\text{문제 풀이}} \ln(1 + x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n}$$

7.

$$\frac{\text{문제 풀이}}{\text{문제 풀이}} \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

8.

$$\frac{\text{문제 풀이}}{\text{문제 풀이}} \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

9.

$$\frac{\text{문제 풀이}}{\text{문제 풀이}} \sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

10.

$$\textcircled{\text{H}} \textcircled{\text{O}} \cos \frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (2n)!}$$

11.

$$\textcircled{\text{H}} \textcircled{\text{O}} \tan^{-1} 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$$

12.

$$\textcircled{\text{H}} \textcircled{\text{O}} x \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(n+1)}}{2n+1}$$

13.

$$\textcircled{\text{H}} \textcircled{\text{O}} f(x) = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \frac{(x-2)^3}{2^4} \mp \dots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \dots$$

14.

$$\textcircled{\text{H}} \textcircled{\text{O}} f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \mp \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$$

15.

$$\textcircled{\text{H}} \textcircled{\text{O}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}$$

16.

$$\textcircled{\text{H}} \textcircled{\text{O}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}$$

17.

$$\textcircled{\text{H}} \textcircled{\text{O}} f(x) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$$

18.

$$\textcircled{\text{H}} \textcircled{\text{O}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} (x-1)^n$$

19.

$$\textcircled{\text{H}} \textcircled{\text{O}} \int \frac{1}{1+x^4} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1}$$

20.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n+1)} x^{2n}$$

21.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \sin x^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)} x^{4n+3}$$

22.

$$\textcircled{\text{풀이}} \int \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1}$$

23.

$\textcircled{\text{풀이}}$ $f(x) = (1+x)^p$ 이라 하면,

$$f(x) = (1+x)^p, \quad f(0) = 1, \quad f'(x) = p(1+x)^{p-1}, \quad f'(0) = p$$

$$f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}, \quad f''(0) = p(p-1)$$

$$f'''(x) = p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3}, \quad f'''(0) = p(p-1)(p-2)$$

등등

$$f^{(n)}(x) = p(p-1) \cdots (p-n+1)(1+x)^{p-n}, \quad f^{(n)}(0) = p(p-1) \cdots (p-n+1)$$

이므로 $(1+x)^p$ 의 매클로린급수는

$$f(x) = (1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p-1) \cdots (p-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$$

이다. 또한 이 급수가 $-1 < x < 1$ 에서 수렴하는 것을 보이기 위하여 절대비판정법을 사용 하면,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{p(p-1) \cdots (p-n+1)(p-n)}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{p(p-1) \cdots (p-n+1)}{n!} x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(p-n)}{n+1} \right| = |x|$$

이므로 수렴중심은 $x=0$ 이고 수렴구간 $-1 < x < 1$ 이다.

24.

 $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$

$$\sqrt{1.1} \approx 1 + \frac{0.1}{2} - \frac{0.01}{8} + \frac{0.001}{16} = 1.04881$$

Section 6.5 연습문제

1.

$$\textcircled{\text{풀이}} \quad F(x) = \frac{a_0}{2} = 1$$

2.

$$\textcircled{\text{풀이}} \quad F(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n \sinh \pi}{(1+n^2)\pi} \cos nx - \frac{(-1)^n n \sinh \pi}{(1+n^2)\pi} \sin nx \right)$$

3.

$$\textcircled{\text{풀이}} \quad F(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1 + (-1)^n}{n\pi} \sin nx = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\pi} \sin (2n+1)x$$

4.

$$\textcircled{\text{풀이}} \quad F(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1 + (-1)^n)}{n^2 \pi} \cos nx = \frac{\pi}{2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \pi} \cos (2n+1)x$$

5.

$$\textcircled{\text{풀이}} \quad F(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{[(2n-1)\pi]^2} \cos (2n-1)\pi x$$

6.

$$\textcircled{\text{풀이}} \quad F(x) = \frac{1}{\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(1-4n^2)\pi} \cos 2nx + \frac{n}{(1-4n^2)\pi} \sin 2nx \right)$$

7.

$$\textcircled{\text{풀이}} \quad f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x$$

8.

$$\textcircled{\text{풀이}} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$