

Section 7.1 연습문제

1.

 $\{(x, y) \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{(x, y) \mid x \neq -1, x \neq 1\}$

2.

 $\{(x, y) \mid xy \neq 0\} = \{(x, y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}$

3.

 $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 \neq 1\}$

4.

 $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 \neq 0\}$

5.

 $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \mid y \leq x, y \geq -x\} \cup \{(x, y) \mid y \geq x, y \leq -x\}$

6.

 $\{(x, y) \mid x^2 - y > 0\} = \{(x, y) \mid y < x^2\}$

7.

 $\{(x, y) \mid x + y + 1 \geq 0\}$

8.

 $\{(x, y) \mid x + y^2 - 1 \geq 0\} \cap \{(x, y) \mid x \neq 0\}$

9.

 (b)

10.

 (d)

11.

 (c)

12.

 (a)

Section 7.2 연습문제

1.

 극한이 존재하지 않는다.

2.

 극한이 존재하지 않는다.

3.

 극한이 존재하지 않는다.

4.

 극한이 존재하지 않는다.

5.

 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 0$

6.

 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} \frac{2x^2 y}{x^2 - y^2} = 0$

7.

 $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, -1)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$

8.

 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0$

9.

 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 0$

10.

 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4} - 2} = 4$

11.

 $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{x}{\sqrt{y+2}} = \frac{1}{2}$

12.

 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \cos \frac{x^2 + y^2}{x + y + 2} = 1$

13.

 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^y \sin x}{x} = 1$

14.

 $\lim_{(x, y) \rightarrow (\pi/2, 1)} \frac{y \sin x}{y^2 + 4} = \frac{1}{5}$

15.

 $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (1, 1, 0)} \frac{x e^y \sin z}{z} = e$

16.

 $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (1, 0, \pi)} \frac{x \cos z}{y^2 + 4} = -\frac{1}{4}$

17.

 $(x, y) = (0, 0)$ 에서 연속이다.

18.

 $(x, y) = (0, 0)$ 에서 연속이다.

19.

 $x = y^3$ 이 아닌 모든 (x, y)

20.

 $x^2 + y^2 > 1$ 인 모든 (x, y)

21.

 $y = x$ 이 아닌 모든 (x, y)

22.

 $x = 0$ 또는 $y = 0$ 이 아닌 모든 (x, y)

23.

 $(x, y) \neq (0, 0)$ 인 모든 (x, y)

24.

 $xy \neq 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 인 모든 (x, y)

25.

 $x^2 + y^2 > 4$ 인 모든 (x, y, z)

26.

 $xyz > 0$ 인 모든 (x, y, z)

27.

 $z \neq e^{x^2 + y^2}$ 인 모든 (x, y, z)

28.

 $(0, 0, z)$ 또는 $(0, y, 0)$ 을 제외한 모든 (x, y, z)

Section 7.3 연습문제

1.

 $f_x(x, y) = 3x^2, f_y(x, y) = -3y^2$

2.

 $f_x(x, y) = 2x - 2y, f_y(x, y) = -2x + 2y$

3.

 $f_x(x, y) = 6x^2 + 2xy - y^2, f_y(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$

4.

 $f_x(x, y) = 2(x - 2y), f_y(x, y) = -4(x - 2y)$

5.

 $f_x(x, y, z) = y + z, f_y(x, y, z) = x + z, f_z(x, y, z) = x + y$

6.

 $f_x(x, y, z) = y^2 + 2zx, f_y(x, y, z) = 2xy - z^2, f_z(x, y, z) = -2yz + x^2$

7.

 $f_x(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z), f_y(x, y, z) = 2\cos(x + 2y + 3z),$
 $f_z(x, y, z) = 3\cos(x + 2y + 3z)$

8.

 $f_x(x, y, z) = \frac{yz(y+z)}{(x+y+z)^2}, f_y(x, y, z) = \frac{xz(x+z)}{(x+y+z)^2}, f_z(x, y, z) = \frac{xy(x+y)}{(x+y+z)^2}$

9.

 $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^{xy^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy e^{xy^2}$

10.

 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(x^2 - y^2), \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \cos(x^2 - y^2)$

11.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}$$

12.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

13.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x \ln y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\ln x}{y(\ln y)^2}$$

14.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2(x^2-y^2)^{-1/2}(x^2+y^2)^{-3/2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2y(x^2-y^2)^{-1/2}(x^2+y^2)^{-3/2}$$

15.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos 2y$$

16.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-y} [\sin(x+y) + \cos(x+y)], \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x-y} [\cos(x+y) - \sin(x+y)]$$

17.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(x-y)^2y^3 + 3x^2(x+y)^2(2x+y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3(x-2y)(x-y)^2y^2 + 3x^3(x+y)^2$$

18.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\ln(x+y)}{x-y} + \frac{\ln(x-y)}{x+y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\ln(x-y)}{x+y} - \frac{\ln(x+y)}{x-y}$$

19.

$$z = y$$

20.

$$z = \frac{1}{4}(\pi - 2x + 2y)$$

21.

 $u = x - y, v = y - x$ 라 하면 $z = f(u, v)$ 이다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot (-1) = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot (-1) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 1 = -\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned}$$

그러므로 $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$ 이다.

22.

 $u = x - y, v = y - z, w = z - x$ 라 하면 $z = f(u, v)$ 이다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{\partial s}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{\partial s}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial s}{\partial v} \cdot 0 + \frac{\partial s}{\partial w} \cdot (-1) = \frac{\partial s}{\partial u} - \frac{\partial s}{\partial w} \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{\partial s}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ &= \frac{\partial s}{\partial u} \cdot (-1) + \frac{\partial s}{\partial v} \cdot 1 + \frac{\partial s}{\partial w} \cdot 0 = -\frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial s}{\partial z} &= \frac{\partial s}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial s}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= \frac{\partial s}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial s}{\partial v} \cdot (-1) + \frac{\partial s}{\partial w} \cdot 1 = -\frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial s}{\partial w}\end{aligned}$$

그러므로 $\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial z} = 0$ 이다.

23.

 $u = \frac{y}{x}$ 라 하면,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

이므로

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

이다. 따라서 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 가 성립한다.

24.

 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y$ 이므로

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y) = e^x \cos y$$

이다. 따라서 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 이 성립한다.

25.

 $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$

26.

 $\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta + r \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta$ 이므로

$$\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta$$

27.

 $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \right) = \frac{\partial z_x}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial z_y}{\partial r} \sin \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \left(\frac{\partial z_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial z_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \right) \sin \theta \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \sin \theta \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin \theta \right) \sin \theta \end{aligned}$$

한편 $z_{xy} = z_{yx}$ 이므로

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin^2 \theta$$

이다.

28.

 [연습문제 25]와 [연습문제 26]으로부터

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned}$$

29.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{yz}{yz+2z^2-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x-z)z}{yz+2z^2-1} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{y^2 z(1+2z^2)}{(yz+2z^2-1)^3} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{4z^5+4yz^4-2(xy+2)z^3-(xy-1)z}{(yz+2z^2-1)^3} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{(x-z)z(x+2xz^2+z(-3+2yz+2z^2))}{(yz+2z^2-1)^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{4z^5+4yz^4-2(xy+2)z^3-(xy-1)z}{(yz+2z^2-1)^3} \end{aligned}$$

30.

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{36}{121}, \quad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{9}{121}, \quad \frac{\partial R}{\partial R_3} = \frac{4}{121}$$

Section 7.4 연습문제

1.

(0, 0, 1)에서 안장점을 갖는다.

$(x, y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 에서 극댓값 $f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{5}{27}$ 를 갖는다.

2.

(0, 0, -4)에서 안장점을 갖는다.

$(x, y) = (-1, -1)$ 에서 극솟값 $f(-1, -1) = -6$ 을 갖는다. 또한
 $(x, y) = (1, 1)$ 에서 극솟값 $f(1, 1) = -6$ 을 갖는다.

3.

(0, 0, 1)에서 안장점을 갖는다.

4.

(0, 0, 0)에서 안장점을 갖는다.

$(x, y) = (1, 1)$ 에서 극솟값 $f(1, 1) = -1$ 을 갖는다.

5.

모든 정수 n 에 대하여 $(0, n\pi, 0)$ 에서 안장점을 갖는다.

6.

극솟값 $f(0, 0) = 0$ 을 갖는다.

$(-1, 0, e^{-1})$ 에서 안장점을 갖는다.

$(1, 0, e^{-1})$ 에서 안장점을 갖는다.

7.

극솟값 $f(1, 1) = 3$ 을 갖는다.

8.

(0, 0, 0)에서 안장점을 갖는다.

$\left(2, -\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 에서 극솟값을 갖는다.

$\left(2, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ 에서 극댓값을 갖는다.

(4, 0, 0)에서 안장점을 갖는다.

9.

 $z_x = 2x + y, z_y = x - 2y$ 이므로 $dz = (2x + y)dx + (x - 2y)dy$

10.

 $dz = e^{x-y} [(x+y+1)dx - (x+y-1)dy]$

11.

 $dz = (y \sin 2x - \cos^2 y)dx + (x \sin 2y + \sin^2 x)dy$

12.

 $dz = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx - \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dy$

13.

 $dz = \frac{xy-1}{x}dx + \frac{xy-1}{y}dy$

14.

 $dz = e^{x+y} [(\cos x + \cos y + \sin x)dx + (\cos y + \sin x - \sin y)dy]$

15.

 원통의 부피에 대한 최대 오차는 0.8%이다.

16.



(a) $dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2$

(b) R_1 의 변화에 더 큰 영향을 받는다.

(c) 3.3% 감소한다.

17.

 가장 높은 온도는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 과 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 에서 $\frac{3}{4}$ 도이고 가장 낮은 온도는 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ 에서 $-\frac{1}{8}$ 도이다.