

CHAPTER 08

8.1

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

8.2

$$-x + y - 2z = 1$$

$$-2y + 4z = 2$$

$$-x - y + 2z = 3$$

8.3

$$(a) \ x_1 = 5, \ x_2 = 7$$

$$(b) \ x_1 = \frac{11}{8}, \ x_2 = \frac{1}{16}$$

(c) 해가 존재하지 않는다.

$$(d) \ x_1 = \frac{1}{2}, \ x_2 = \frac{1}{2}, \ x_3 = 2$$

$$(e) \ x_1 = 1, \ x_2 = 4, \ x_3 = 10$$

(f) 해가 존재하지 않는다.

8.4

$$(a) \ x_1 = -2, \ x_2 = -\frac{5}{2}$$

$$(b) \ x_1 = -\frac{1}{6}, \ x_2 = \frac{5}{3}$$

$$(c) \ x_1 = -\frac{14}{3}, \ x_2 = -\frac{5}{3}$$

$$(d) \ x_1 = \frac{18}{5}, \ x_2 = 2, \ x_3 = -\frac{4}{5}$$

$$(e) \ x_1 = -\frac{2}{3}, \ x_2 = \frac{3}{4}, \ x_3 = \frac{4}{3}$$

$$(f) \ x_1 = -\frac{14}{3}, \ x_2 = -\frac{4}{3}, \ x_3 = 5$$

8.5

(a) $x_1 = -\frac{1}{11}, \quad x_2 = -\frac{3}{11}$

(b) $x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

(c) 해가 존재하지 않는다.

(d) $x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \frac{1}{4}$

(e) $x_1 = -\frac{7}{5} - \frac{4}{5}c, \quad x_2 = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}c, \quad x_3 = c$

(f) 해가 존재하지 않는다.

8.6

(a) $x_1 = 4c, \quad x_2 = c,$

(b) $x_1 = x_2 = 0$ (자명한 해)

(c) $x_1 = x_2 = 0$ (자명한 해)

(d) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} c$

(e) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 1 \end{bmatrix} c$

(f) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} c$

8.7

(a) $\vec{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\vec{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$

(c) $\vec{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 5 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$(d) \vec{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -\frac{2}{5} & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

8.8

$$(a) i_1 = \frac{10}{2R_1 + R_2}, i_2 = \frac{5}{2R_1 + R_2}, i_3 = \frac{5}{2R_1 + R_2}$$

$$(b) i_1 = 16/11 A, i_2 = 10/11 A, i_3 = 6/11 A$$

8.9

$$(a) \text{고윳값} : \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$$

$$\textcircled{1} \lambda_1 = -1 \text{일 때 고윳벡터} : \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} c$$

$$\textcircled{2} \lambda_2 = 5 \text{일 때 고윳벡터} : \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

$$(b) \text{고윳값} : \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

$$\textcircled{1} \lambda_1 = 3 \text{일 때 고윳벡터} : \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

$$\textcircled{2} \lambda_2 = -1 \text{일 때 고윳벡터} : \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

$$(c) \text{고윳값} : \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5$$

$$\textcircled{1} \lambda_1 = 0 \text{일 때 고윳벡터} : \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

$$\textcircled{2} \lambda_2 = -5 \text{일 때 고윳벡터} : \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} c$$

$$(d) \text{고윳값} : \lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \text{일 때 고윳벡터} : \vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

$$(e) \text{고윳값} : \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \text{일 때 고윳벡터} : \vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

(f) 고윳값 : $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

(g) 고윳값 : $\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1-i$

$$\textcircled{1} \lambda_1 = 1+i \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_1} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} c$$

$$\textcircled{2} \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1-i \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_2} = \overline{\overrightarrow{V_1}} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} c$$

(h) 고윳값 : $\lambda_1 = 4+i, \lambda_2 = 4-i$

$$\textcircled{1} \lambda_1 = 4+i \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2-i \end{bmatrix} c$$

$$\textcircled{2} \lambda_2 = 4-i \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2+i \end{bmatrix} c$$

(i) 고윳값 : $\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$

$$\textcircled{1} \lambda_1 = 2i \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \end{bmatrix} c$$

$$\textcircled{2} \lambda_2 = -2i \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-i \end{bmatrix} c$$

(j) 고윳값 : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$

$$\textcircled{1} \lambda_1 = 1 \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

$$\textcircled{2} \lambda_2 = 2 \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

$$\textcircled{3} \lambda_3 = -2 \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_3} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

(k) 고윳값 : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$

$$\textcircled{1} \lambda_1 = 1 \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

$$\textcircled{2} \lambda_2 = -1 \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

$$\textcircled{3} \lambda_3 = 3 \text{ 일 때 고유벡터 : } \overrightarrow{V_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

(l) 곱셈값 : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

❶ $\lambda_1 = 1$ 일 때 고유벡터 : $\overrightarrow{V_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} c$

❷ $\lambda_2 = 2$ 일 때 고유벡터 : $\overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} c$

❸ $\lambda_3 = 3$ 일 때 고유벡터 : $\overrightarrow{V_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c$

(m) 곱셈값 : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

❶ $\lambda_1 = 1$ 일 때 고유벡터 : $\overrightarrow{V_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} c$

❷ $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 일 때 고유벡터 : $\overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overrightarrow{V_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(n) 곱셈값 : $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = \lambda_3 = 4$

❶ $\lambda_1 = 7$ 일 때 고유벡터 : $\overrightarrow{V_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} c$

❷ $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$ 일 때 고유벡터 : $\overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c, \overrightarrow{V_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$

(o) 곱셈값 : $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$

❶ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 일 때 고유벡터 : $\overrightarrow{V_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c, \overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$

❷ $\lambda_3 = 4$ 일 때 고유벡터 : $\overrightarrow{V_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} c$

8.10

(a) $\overrightarrow{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

(b) $\overrightarrow{D} = \begin{bmatrix} 4+i & 0 \\ 0 & 4-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

(c) 행렬 $\overrightarrow{A}$ 는 대각화가 불가능하다.

(d) $\overrightarrow{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$(e) \quad \overrightarrow{D} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(f) \quad \overrightarrow{D} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

8.11

$$(a) \quad \overrightarrow{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad \overrightarrow{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad \overrightarrow{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

8.12

(a) 세 벡터가 서로 직교한다.

(b) 고윳값에 대응하는 고유벡터는 다음과 같다.

$$\lambda_1 = 2, \quad \overrightarrow{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1, \quad \overrightarrow{V}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -1, \quad \overrightarrow{V}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{V}_1$ 과 $\overrightarrow{V}_2$ 는 직교하고, $\overrightarrow{V}_2$ 과 $\overrightarrow{V}_3$ 는 직교하지 않고, $\overrightarrow{V}_1$ 과 $\overrightarrow{V}_3$ 는 직교한다.

8.13

$$(a) \quad \overrightarrow{A}^4 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad \overrightarrow{A}^4 = \begin{bmatrix} 41 & 60 & 80 \\ 0 & 1 & 0 \\ 20 & 30 & 41 \end{bmatrix}$$

8.14

$$(a) \quad \vec{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad \vec{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$